

# ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ПАКЕТІВ У ПРОЦЕСІ ВИВЧЕННЯ КУРСУ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

*Юлія БОТУЗОВА (Кіровоград, Україна)*

**Постановка проблеми.** Нестримний розвиток інформаційно-комунікаційних технологій, поява цілого ряду потужних математичних пакетів диктують зміни в побудові і вивченні курсів математики як у школах, так і у вищих навчальних закладах. Особливо актуальною ця проблема є для факультетів, де вивчення математики є фаховим, оскільки кількість навчальних годин обмежена, а кількість інформації постійно зростає. Це призводить до відсутності навичок роботи з математичними пакетами, що, в свою чергу, накладає відбиток на якість професійної підготовки майбутніх інженерів, учених, учителів на сучасному рівні.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Вже немало наукових робіт присвячено питанню підвищення ефективності навчання математики при використанні інформаційно-комунікаційних технологій. Серед них відмітимо праці В.П. Беспалько, В.О. Далінгера, М.І. Жалдака, Є.В. Клименко, Н.В. Морзе, Н.Ф. Тализіної та ін. Процес інтенсифікації навчання у ВНЗ, що досягається за рахунок вдосконалення змісту навчального матеріалу та методів навчання досліджували В.І. Вершинін, Ю.П. Дубенський, Н.Р. Жарова, Н.А. Ждан, Є.В. Клименко та ін. Однак поставлені питання в умовах безперервної інформатизації освіти залишаються актуальними та постійно зацікавлюють широке коло дослідників.

**Мета даної статі** – аналіз функціональних можливостей та доцільності використання математичного пакету Maple у процесі вивчення курсу диференціальних рівнянь.

Взявши за приклад фізико-математичний факультет педагогічного університету, можна сказати, що починати освоювати математичні пакети студентам необхідно з першого курсу, під час вивчення таких дисциплін як математичний аналіз, лінійна алгебра, аналітична геометрія і, звичайно, шкільний курс математики. А потім слід вдосконалювати свої вміння на старших курсах під час вивчення диференціальних рівнянь, дискретної математики, теорії ймовірностей та математичної статистики, чисельних методів, математичного моделювання в економіці/фізиці.

**Виклад основного матеріалу.** Використання математичних пакетів органічно доповнює викладання зазначених дисциплін, а також допомагає при виконанні курсових та дипломних проєктів. Студенти мають змогу не тільки одразу отримати необхідний розв'язок задачі, а й перевірити результати, отримані вручну.

Звичайно, на сьогоднішній день використання математичних пакетів під час навчання є достатньо проблематичним. По-перше, ліцензовані версії пакетів коштують дуже дорого, тому не всі студенти в змозі їх придбати для роботи вдома. Хоча цієї проблеми можна позбутися, якщо користуватися програмами, що встановлені в комп'ютерних лабораторіях вишу.

По-друге, впровадження цих пакетів пов'язане з вивченням правил роботи в пакеті, вивченням інтерфейсу. В курсі інформатики, на жаль, ці пакети в достатньому обсязі не вивчаються, а в інших дисциплінах часу на це майже не виділяється. Тому студенти часто виявляються безпомічними, коли постає необхідність застосування комп'ютерних технологій на практиці. Використання пакетів символьних перетворень при вивченні математичних дисциплін повинно стати буденним.

По-третє, виникає питання відсутності необхідної кваліфікації у педагогів. Щоб її вирішити достатньо на факультеті організувати курси підвищення кваліфікації.

Ще однією проблемою у викладанні математичних дисциплін із використанням математичних пакетів є недостатність їхньої методичний супровід. В Інтернеті можна знайти у вільному доступі книги, які описують функціональні можливості пакетів із прикладами з різноманітних областей знань. Але дуже мало книг, які можна використовувати як навчальну та методичну літературу для окремих курсів і дисциплін в процесі навчання у вузі. При цьому складність роботи в пакеті повинна відповідати поставленим задачам.

Звичайно, перешкодою на шляху до широкого використання пакетів є як недостатня оснащеність комп'ютерами, так і відсутність необхідної кваліфікації у педагогів.

Така ситуація призводить до того, що випускник вузу не володіє сучасними комп'ютерними технологіями.

На сьогодні існує достатньо багато комп'ютерних програм для розв'язування математичних задач. Вони відрізняються кількістю здійснюваних ними функцій, графічними можливостями, якістю та зручністю інтерфейсу, можливістю обміну даними з іншими пакетами, областю застосування та іншими характеристиками.

Зупинимось на характеристиках математичного пакету Maple, про досвід використання якого під час викладання дисципліни «Диференціальні рівняння» йтиметься далі.

Пакет Maple – найперший пакет символьної математики, який на сьогодні є лідером серед універсальних систем символьних обчислень і користується особливою популярністю в науковому середовищі. Однією з переваг даного пакету є інтерактивність – користувач вводить команди і відразу на екрані бачить результат їхнього виконання чи повідомлення про помилку. На відміну від традиційного середовища програмування Maple не вимагає жорсткої формалізації всіх змінних і дій з ними. Вибір потрібних типів змінних та перевірка коректності виконання операцій здійснюється автоматично [2].

Інтерфейс Maple базується на концепції робочого поля у вигляді електронних таблиць, що містять як числа, так і символи, графіку. Робочі листи можна організувати ієрархічно, у вигляді розділів і підрозділів, адже в програмі є опція розбиття на параграфи, розділи і додавання гіперпосилань, які дозволяють швидко переміщуватися по робочому листу. Слід також зауважити, що інтерфейс програми англomовний, тому відкриваючи довідку, яка містить величезну кількість прикладів та описів вбудованих до неї функцій, варто бути готовим до можливих незручностей, що криються в складності перекладу.

Пакет Maple має потужний апарат для обчислень у символьному вигляді. Результати обчислень можуть виводитись у вигляді звичайних дробів, передбачено роботу з комплексними числами. Програму Maple можна використовувати для розв'язання задач диференціального та інтегрального числення, обчислення границь, розкладу в ряд, а також для дослідження неперервних чи кусково-неперервних функцій [1:3].

Курс диференціальних рівнянь традиційно складається з лекційних та семінарських занять. Успішне освоєння дисципліни «Диференціальні рівняння» можливе за умови існування хорошої бази знань із математичного аналізу у студентів, а саме диференціального та інтегрального числення функцій однієї та кількох змінних.

Ми пропонуємо, крокуючи в ногу з часом, урізноманітнити семінарські та осучаснити лекційні заняття шляхом використання ІКТ, що в свою чергу дозволить викладачеві охопити більший обсяг матеріалу, а студентам глибше зрозуміти й освоїти навчальний матеріал.

Під час лекції викладач, демонструючи приклад розв'язування диференціального рівняння, може скористатися програмою Maple для того, щоб: 1) продемонструвати функціональну можливість програми Maple класифікувати диференціальні рівняння; 2) знайти інтеграл, для обчислення яких вручну витрачається нерационально велика кількість часу; 3) звірити розв'язок отриманий вручну з тим, який запропонує програма.

Для того, щоб в повній мірі використовувати функціональні можливості пакету, необхідно підключити модуль роботи з диференціальними рівняннями: `with(ODETools)`, який містить велику кількість спеціалізованих операторів (рис.1):

```
with(ODETools),
[AreSimilar, DNormal, DEplot, DEplot3d, DEplot_polygon, DFactor, DFactorLCM, DFactorsols, Dchangevar, FunctionDecomposition, GCRD, Gosper, Heunsols,
Homomorphisms, IsHyperexponential, LCLM, MeijerGsols, MultiplicativeDecomposition, ODEinvariants, PDEchangecoords, PolynomialNormalForm,
RationalCanonicalForm, ReduceHyperexp, RiemannPsols, Xchange, Xcommutator, Xgauge, Zeilberger, abelsol, adjoint, autonomous, bernoullisol, buildsol, buildsym,
canoni, caseplot, casesplit, checkrank, chinisol, clatraisol, constcoeffsols, convertAlg, convertsys, dalembertsol, dcoeffs, de2diffop, dfieldplot, diff_table, diffop2de,
dperiodic_sols, dpolyform, dsols, eigenring, endomorphism_charpoly, equinv, eta_k, eulersols, exactsol, expsol, exterior_power, firint, firint, formal_sol, gen_exp,
generate_ic, genhomosol, gensys, hamilton_eqs, hypergeomsols, hyperode, indetaleq, infgen, initialdata, integrate_sols, infactor, invariants, kovacsols, lefidivision,
liesol, line_int, linearsol, matrixDE, matrix_riccati, maxdmsystems, moser_reduce, muchange, mult, mulest, newton_polygon, normalG2, ode_int_y, ode_y1, odeadvisor,
odepde, parametricol, particularsol, phaseportrait, poincare, polysols, power_equivalent, rational_equivalent, ratsols, redode, reduceOrder, reduce_order,
regular_pis, regularsp, remove_RootOf, riccati_system, riccatisol, rfsread, rfsimp, righdivison, rtaylor, separablesol, singularities, solve_group, super_reduce,
syngen, symmetric_power, symmetric_product, symtest, transinv, translate, untranslate, varparam, zoom]
```

Рис.1. Оператори та функції модуля ODETools

Програма має гарну довідкову систему, де описується робота, характеристики та властивості кожного оператора, а також надаються різноманітні приклади їхнього використання при розв'язуванні типових задач. Хочеться зауважити, що часто проблемним у користуванні цим пакетом стає саме англomовний інтерфейс та англomовна довідка: одні студенти не зважають на це та продовжують вдосконалювати свої знання з математики, і, одночасно, іноземної мови, а інші – опускають руки і не користуються, на їхній погляд, незручною програмою.

Після підключення модуля ODETools, можна скористатися вбудованим класифікатором диференціальних рівнянь – `odeadvisor`, який працює як показано на рис.2. Так, наприклад, якщо ввести диференціальне рівняння:  $y' - xy^2 = 2xy$  [3:13], то отримаємо що воно має тип *separable*, що в перекладі означає – «диференціальне рівняння зі змінними, що відокремлюються».

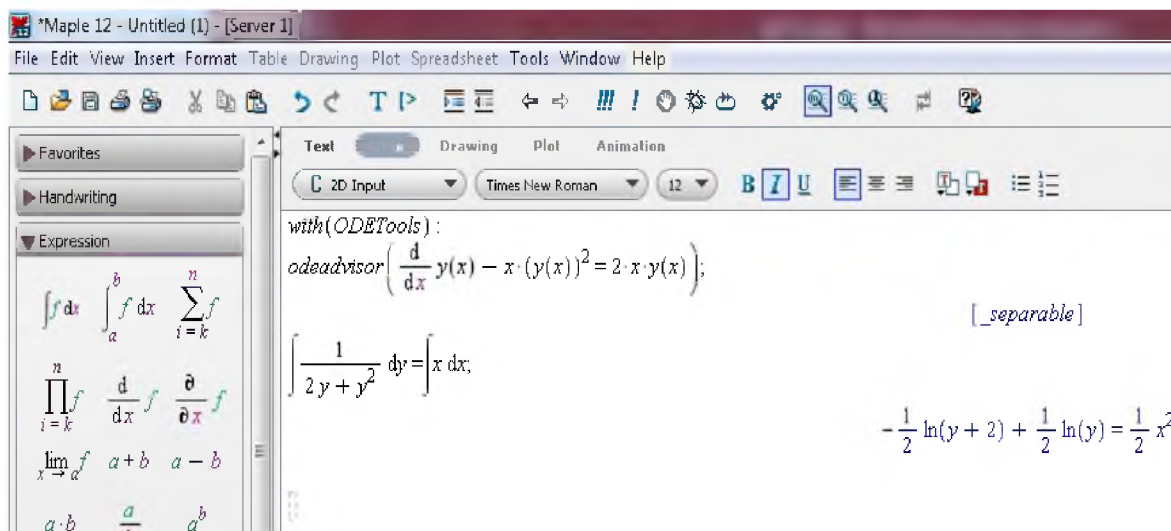


Рис. 2. Інтерфейс програми Maple 12 і фрагмент лекції «Диференціальні рівняння з відокремленими змінними»

Розв'язуючи це рівняння вручну:  $y' = 2xy + xy^2$ ;  $y' = x(2y + y^2)$ ;

$\frac{dy}{dx} = x(2y + y^2)$ ;  $\frac{dy}{2y + y^2} = x dx$ ; дійдемо до таких інтегралів:  $\int \frac{dy}{2y + y^2} = \int x dx$ . Інтеграл, що

стоїть справа, обчислюється за таблицею, а от на відшукування інтегралу зліва необхідно витратити більшу кількість часу: розкласти на незвідні множники знаменник, розкласти на елементарні дробі даний раціональний вираз, проінтегрувати методом розкладу.

Порівняємо результати обчислень інтегралів, отримані комп'ютером (рис.2) та вручну. Розкладемо підінтегральний вираз лівого інтегралу на елементарні дробі:

$$\frac{A}{y} + \frac{B}{2+y} = \frac{2A + Ay + By}{y(2+y)} = \frac{1}{2y + y^2}; \begin{cases} 2A = 1; \\ A + B = 0. \end{cases} \Rightarrow A = \frac{1}{2}; B = -\frac{1}{2}.$$

Отже,  $\int \frac{dy}{2y+y^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} - \frac{1}{2} \int \frac{dy}{2+y} = \frac{1}{2} \ln|y| - \frac{1}{2} \ln|y+2|$ . Таким чином, ми отримали відповідь  $\frac{1}{2} \ln|y| - \frac{1}{2} \ln|y+2| = \frac{x^2}{2} + C$ , ідентичну з автоматизованою відповіддю програми (рис.2), але часу на відшукування інтегралу вручну було витрачено не раціонально багато, що неприпустимо для навчального процесу. Вміння обчислювати інтеграли студенти відпрацьовували на молодших курсах, а під час вивчення диференціальних рівнянь, нас, перш за все, повинні цікавити методи розв'язування рівнянь, а не інтегралів, до яких вони зводяться. Тому можна рутинну роботу по знаходженню складних, громіздких інтегралів перекладати на «плечі» математичних пакетів.

Повернемося до нашого рівняння  $y' = 2xy + xy^2$ . Ми отримали його загальний інтеграл, звівши вихідне рівняння до відшукування інтегралів. Але програма Maple дозволяє одразу знайти розв'язок рівняння, причому як у вигляді загального інтегралу, так і у вигляді загального розв'язку. Для цього в ній існують оператори (рис.3): *dsolve*, який розв'язує диференціальні рівняння будь-якого типу та ще цілий ряд операторів, які відповідають існуючим типам рівнянь (в нашому прикладі це оператор *separablesol*).

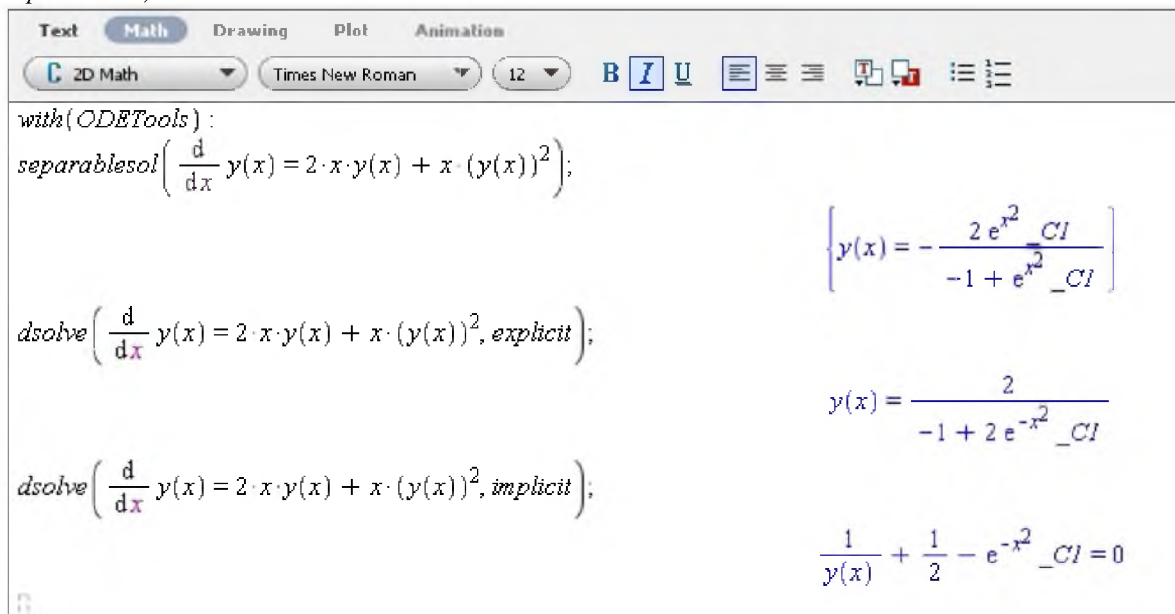


Рис. 3. Результати розв'язку одного і того ж диференціального рівняння при використанні різних операторів

Як видно з рис.3, результати операцій на перший погляд різні, але насправді, вони тотожно рівні. Їхня відмінність полягає тільки в кількості та якості тотожних перетворень, які здійснювались над загальним інтегралом рівняння, який ми знайшли вище у вигляді  $\frac{1}{2} \ln|y| - \frac{1}{2} \ln|y+2| = \frac{x^2}{2} + C$ .

Окрім того, зазначимо, що оператор *separablesol* видає загальний розв'язок диференціального рівняння, а оператор *dsolve* може повертати як загальний розв'язок, так і загальний інтеграл рівняння. Для цього в середині оператора *dsolve* прописується умова *explicit* або *implicit* відповідно. Таким чином, при використанні математичного пакету Maple студентами для перевірки отриманого ними вручну розв'язку можуть виникати проблеми. Тому варто завчасно попередити студентів про такі нюанси роботи, показати їм наочні приклади, та привчати до здійснення максимально можливої кількості перетворень над отриманими загальними інтегралами диференціальних рівнянь. Так, в нашому прикладі, необхідно було б домножити отриманий загальний інтеграл на 2, а потім скористатись властивостями логарифмів:  $\ln|y| - \ln|y+2| = x^2 + C_1$ ;  $\ln\left|\frac{y}{y+2}\right| = x^2 + C_1$ ;

$$\frac{y}{y+2} = e^{x^2+C_1}; y = (y+2)C_2e^{x^2}; y(1-C_2e^{x^2}) = 2C_2e^{x^2}, \text{ і отримати, наприклад, ось такий загальний}$$

розв'язок –  $y = \frac{2C_2 e^{x^2}}{1 - C_2 e^{x^2}}$ , який збігається із розв'язком, отриманим від оператора *separablesol*

(відмінність тільки в знаку мінус, що винесений перед дробом на рис.3).

Дуже часто велику практичну цінність має кількість розв'язаних різноманітних прикладів, що зробити в умовах обмеженого часу важко. Тому в такому випадку корисно проводити семінарські заняття у вигляді лабораторних робіт з використанням математичних пакетів. Зокрема, під час розгляду теми «Лінійні диференціальні рівняння n-ого порядку зі сталими коефіцієнтами» необхідно розглянути всі можливі варіанти при отриманні характеристичних розв'язків цих рівнянь, враховуючи їхню кратність та належність до множини дійсних чи комплексних чисел.

За схемою, наведеною на рис.4, можна проводити запропоноване лабораторне заняття.

#### Розв'язати диференціальне рівняння

$$y'' + y' - 2y = 0;$$

$$\frac{d^2}{dx^2} y(x) + \frac{d}{dx} y(x) - 2y(x) = 0$$

Характеристичне рівняння :

$$\text{solve}(\lambda^2 + \lambda - 2 = 0);$$

$$1, -2$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння :

$$\text{dsolve}\left(\frac{d^2}{dx^2} y(x) + \frac{d}{dx} y(x) - 2y(x) = 0\right);$$

$$y(x) = _C1 e^x + _C2 e^{-2x}$$

Рис. 4. Схема розв'язування лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами

Таким чином, за допомогою оператора *solve*, математичного пакету Maple можна значно скоротити час на обчислення коренів характеристичних рівнянь, які можуть бути рівняннями другого, третього та вищих степенів (рис.5). Крім того на екрані комп'ютера можна легко співставити отримані розв'язки характеристичних рівнянь та відповідних їм диференціальних рівнянь. У даному випадку, використання розглядуваного програмного забезпечення дозволяє охопити більшу кількість навчального матеріалу та краще його засвоїти.

$$\text{solve}(\lambda^3 - 8 = 0);$$

$$2, -1 + I\sqrt{3}, -1 - I\sqrt{3}$$

$$\text{dsolve}(y''' - 8y = 0);$$

$$y(x) = _C1 e^{2x} + _C2 e^{-x} \sin(\sqrt{3} x) + _C3 e^{-x} \cos(\sqrt{3} x)$$

$$\text{solve}(\lambda^4 + 4 = 0);$$

$$1 + I, 1 - I, -1 + I, -1 - I$$

$$\text{dsolve}(y'''' + 4y = 0);$$

$$y(x) = _C1 e^{-x} \sin(x) + _C2 e^{-x} \cos(x) + _C3 e^x \sin(x) + _C4 e^x \cos(x)$$

$$\text{solve}(\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0);$$

$$1, 1, 1$$

$$\text{dsolve}(y''' - 3y'' + 3y' - y = 0);$$

$$y(x) = _C1 e^x + _C2 e^x x + _C3 e^x x^2$$

Рис.5. Фрагмент лабораторної роботи з теми «Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами»

**Висновки.** Досвід використання математичних пакетів під час проведення лекційних та семінарських занять з диференціальних рівнянь дає позитивні результати. Окрім того, що збільшується ефективність засвоєння навчального матеріалу дисципліни, також відбувається тісне знайомство студентів із вказаним програмним забезпеченням, яке вони потім з легкістю зможуть використовувати під час написання курсових та дипломних проєктів.

Обмежений обсяг статті не дозволив навести більшу кількість прикладів та охопити всі функціональні можливості, особливості та нюанси використання математичного пакету Maple, тому плануємо присвятити цьому подальші свої роботи.

**БІБЛІОГРАФІЯ**

1. Касюк С. Т. Высшая математика на компьютере в программе Maple 14: учебное пособие по лабораторным работам / С.Т. Касюк, А.А. Логвинова. – Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2011. – 57 с.
2. Сдвижков О. А. Математика на компьютере: Maple 8 / О.А. Сдвижков. – М.: СОЛОН-Пресс, 2003. – 176 с.
3. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям – М.:Интеграл-Пресс, 1998. – 208 с.

**ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРА**

**Ботузова Юлія Володимирівна** – кандидат педагогічних наук, старший викладач кафедри математики Кіровоградського державного педагогічного університету імені Володимира Винниченка.

*Коло наукових інтересів:* використання ІКТ в процесі навчання математичних дисциплін, дистанційне навчання.